

33. Herbstschule für Hochenergiephysik
Maria Laach 2001

Sudakov-Logarithmen in Zwei-Schleifen-Korrekturen zum QED-Formfaktor

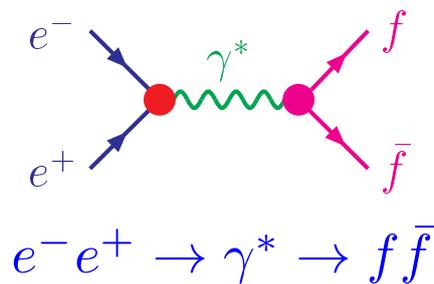
Bernd Feucht

*Institut für Theoretische Teilchenphysik
Universität Karlsruhe*

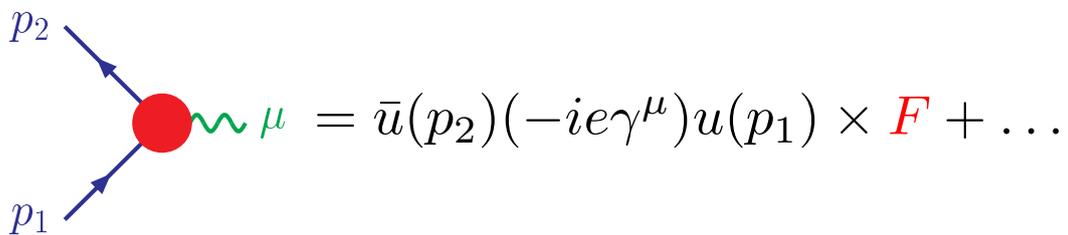
- Motivation
- Sudakov-Logarithmen
- QED-Formfaktor
- Zusammenfassung

Motivation

Vergleich zwischen Theorie und Experiment:



$e^- e^+$ -Vertex-Diagramm \rightarrow **Formfaktor F** :



QED-Störungstheorie

Formfaktor als Reihenentwicklung in $\alpha \ll 1$:

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots$$

Motivation

Vergleich zwischen Theorie und Experiment

→ Elektron-Positron-Vernichtung: über virtuelles Photon
Erzeugung eines Fermion-Antifermion-Paares (Myonen, Quarks)

→ e^+e^- -Vertex-Diagramm:

Born-Term multipliziert mit Formfaktor F^1

QED-Störungstheorie

Formfaktor F als Reihenentwicklung in der Feinstrukturkonstante

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \ll 1$$

→ Koeffizienten $F_0, F_1 (\times \alpha), F_2 (\times \alpha^2), \dots$

¹+ Term $\propto \sigma^{\mu\nu} q_\nu$ (verschwindet für $m_e = 0$)

Wozu höhere Korrekturen?

- F_0 → niedrigste Ordnung, Born-Term
- F_1 → *Korrektur* zur niedrigsten Ordnung
 ↪ Berechnung von F_1 mit *Renormierung*
 → Skalenabhängigkeit
- F_2 → *Korrektur* der Skalenvariation

Wie groß sind die Korrekturen?

F_1 enthält *doppelte Logarithmen* $\ln^2(\dots) \gg 1$

→ **Sudakov-Logarithmen** Sudakov '56 (QED)

$$F \sim 1 + \alpha (\ln^2 + \ln + 1) + \alpha^2 (\ln^4 + \ln^3 + \ln^2 + \ln + 1) + \dots$$

Systematische Untersuchung der
Korrekturen höherer Ordnung nötig.

QED-Strahlungskorrekturen

Wozu höhere Korrekturen?

- $F_0 \rightarrow$ niedrigste Ordnung, entspricht Born-Term ($F_0 = 1$)
- $F_1 \rightarrow$ 1. Korrektur zur niedrigsten Ordnung
 \hookrightarrow Berechnung von F_1 erfolgt mittels *Renormierung*
 \rightarrow Abhängigkeit von der *Renormierungsskala*
- $F_2 \rightarrow$ 1. Korrektur der Skalenvariation

Wie groß sind die Korrekturen?

F_1 enthält *doppelte Logarithmen* $\ln^2(\dots) \gg 1$,

zuerst von Sudakov in der QED festgestellt

\rightarrow *Sudakov-Logarithmen*¹

(Argument der Logarithmen vorerst offengelassen, Kinematik)

\rightarrow schematische Darstellung des Formfaktors F :

F_i enthält führende Logarithmen \ln^{2i} , nicht-führende Logarithmen \ln^{2i-j}, \dots , Terme $\sim \mathcal{O}(1)$.

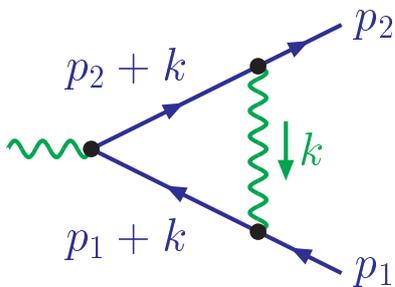
\Rightarrow höhere Korrekturen trotz α -Faktoren nicht unbedingt sehr viel kleiner als niedrigere Ordnungen².

\Rightarrow *Systematische Untersuchung der Korrekturen höherer Ordnung nötig.*

¹V. V. Sudakov: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1956) 87
 [Sov. Phys. JETP 3 (1956) 65]

²mit $\alpha_W = \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2 \sin^2 \theta_W} = 0.02$, $M = 100 \text{ GeV}$, $Q = 1 \text{ TeV}$
 $\rightarrow F_1 = -0.03$

Woher kommen doppelte Logarithmen?



$$p_1^2 = p_2^2 = 0$$

$$p_{1,2} = (E_e, \pm \vec{p})$$

$$k = (E_\gamma, \vec{k})$$

Schleifen-Integration (vereinfacht, skalar):

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_1 + k)^2 + i\epsilon} \frac{1}{(p_2 + k)^2 + i\epsilon}$$

$$\gamma\text{-Propagator: } \frac{1}{k^2 + i\epsilon} \sim -i\pi \delta(k^2) \Rightarrow k^2 = 0$$

$$e\text{-Propagator: } \frac{1}{(p_{1,2} + k)^2} \sim \frac{1}{2E_e E_\gamma (1 \mp \cos \theta_{e\gamma})}$$

→ singularär für $E_\gamma = 0$ und $\cos \theta_{e\gamma} = \pm 1$.

$$\int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \longrightarrow \int \frac{dE_\gamma}{E_\gamma} \int \frac{d(\cos \theta_{e\gamma})}{1 \mp \cos \theta_{e\gamma}} \sim \ln(\dots) \ln(\dots)$$

Doppelte Logarithmen

Woher kommen doppelte Logarithmen?

→ schematische Schleifen-Integration eines Vertex-Diagramms¹:

- masselose on-shell Fermionen: $p_1^2 = p_2^2 = 0$
- Wahl des Bezugssystems²
- Photon-Propagator aufteilen in Realteil (→ Hauptwert-Integral) und Imaginärteil (δ -Funktion).
Wesentlicher Beitrag bei Integration über k^2 von δ -Funktion
⇒ $k^2 \sim 0$ festgelegt.
- Elektron-Propagatoren mit $p_i^2 = 0$ und $k^2 = 0$
→ singularär für $E_\gamma = 0$ und $\cos \theta_{e\gamma} = \pm 1$ d.h. $\theta_{e\gamma} = 0$
bzw. $\theta_{e\gamma} = \pi$ ($\theta_{e\gamma} = \angle(\vec{p}_1, \vec{k})$).
- Schleifen-Integration³:
 - 1 Logarithmus von $\frac{dE_\gamma}{E_\gamma}$
 - 1 Logarithmus von $\frac{d(\cos \theta_{e\gamma})}{1 \pm \cos \theta_{e\gamma}}$ ⁴

¹Quantitativer mit Sudakov-Parametrisierung des virtuellen Photonimpulses: $k = vp_1 + up_2 + k_\perp$, $p_i \cdot k_\perp = 0$, $k_\perp^2 < 0$; Infrarot-Regulator M oder μ

² $\vec{p}_1 = -\vec{p}_2 \rightarrow p_1^0 = p_2^0 = E_e$, $k^0 = E_\gamma$

³ $d^4k = dk^2 \pi d(\cos \theta_{e\gamma}) dE_\gamma \sqrt{E_\gamma^2 - k^2}$

⁴nach Partialbruchzerlegung

Sudakov-Logarithmen

Sudakov-Limes:

- Impulsübertrag $|(p_1 - p_2)^2| \equiv Q^2 \rightarrow \infty$
- masselose on-shell Fermionen ($p_1^2 = p_2^2 = 0$)
- Eichbosonen mit endlicher Masse, $M^2 \ll Q^2$

Formfaktor im Sudakov-Limes enthält:

$$\left[g^2 \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) \right]^n \quad \textit{Sudakov-Logarithmen}$$

Kühn et al. '00; Fadin et al. '00; Denner, Pozzorini '01

Elektroschwache Strahlungskorrekturen

bei hohen Beschleuniger-Energien,

$$Q \sim \text{TeV} \gg M_{W,Z}$$

\Rightarrow große negative Korrekturen in
exklusiven Wirkungsquerschnitten.

Sudakov-Logarithmen können
Strahlungskorrekturen dominieren.

Sudakov-Logarithmen

Sudakov-Limes¹

- Impulsübertrag² $|(p_1 - p_2)^2| \equiv Q^2 \rightarrow \infty$
- masselose on-shell Fermionen ($p_1^2 = p_2^2 = 0$)
- Eichbosonen mit endlicher Masse M
- $M^2 \ll Q^2 \Rightarrow Q^2/M^2 \gg 1$

Im Sudakov-Limes:

Formfaktor enthält in den verschiedenen Ordnungen Störungstheorie Potenzen von $g^2 \ln^2(Q^2/M^2) \rightarrow$ *Sudakov-Logarithmen* (g : Kopplungskonstante).

Übertragen auf **Elektroschwache Strahlungskorrekturen³**

bei hohen Beschleuniger-Energien, $Q \sim \text{TeV} \gg M_{W,Z}$

\Rightarrow große negative Korrekturen in exklusiven Wirkungsquerschnitten⁴

\Rightarrow Sudakov-Logarithmen können Strahlungskorrekturen dominieren.

¹Anderer „Standard“-Sudakov-Limes (hier nicht betrachtet): masselose Eichbosonen, Fermionen off-shell: $p_1^2 = p_2^2 = -M^2$

²hier raumartig \rightarrow reelle Ergebnisse; für $e^+e^- \rightarrow f\bar{f}$ zeitartig \rightsquigarrow analytische Fortsetzung

³J. H. Kühn, A. A. Penin, V. A. Smirnov: *Eur. Phys. J.* C17 (2000) 97; V. S. Fadin, L. N. Lipatov, A. D. Martin, M. Melles: *Phys. Rev.* D61 (2000) 094002; A. Denner, S. Pozzorini: *Eur. Phys. J.* C18 (2001) 461.

⁴große negative Korrekturen durch virtuelle Eichbosonen; mehrfache Emission weicher/kollinearer Eichbosonen kinematisch möglich \rightarrow große positive Korrekturen durch reelle Emission

Resummation der Logarithmen

z.B. Collins '80; Sen '81; Korchemsky '89;
Contopanagos, Laenen, Sterman '97; ...

Störungstheorie verbessern \rightarrow

Logarithmen in allen Ordnungen aufsummieren

(\rightsquigarrow Renormierungsgruppengleichung).

Schematisches Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 F &= 1 + \alpha (\ln^2 + \ln + 1) \\
 &\quad + \alpha^2 (\ln^4 + \ln^3 + \ln^2 + \ln + 1) + \dots \\
 &= \exp \left(\alpha (\ln^2 + \ln) + \alpha^2 (\ln^4 + \ln^3 + \dots) + \dots \right) \\
 &\quad \times \left(1 + \alpha (1) + \alpha^2 (1) + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Störungsreihe umorganisiert:

- $\exp(\dots)$ enthält die großen Logarithmen
- Koeffizienten $\sim \mathcal{O}(\text{const})$

Resummation der Logarithmen¹

Bessere Kontrolle über Verhalten der Korrekturen in Störungstheorie

→ Logarithmen in allen Ordnungen aufsummieren

(↔ Renormierungsgruppengleichung).

→ schematisches Ergebnis

Störungsreihe umorganisiert:

- große Logarithmen in *Exponentialfunktion*² aufsummiert
→ Verhalten für $Q^2 \rightarrow \infty$ bekannt
- Koeffizienten der Exponentialfunktion $\sim \text{const}$

¹J. C. Collins: Phys. Rev. D22 (1980) 1478;
A. Sen: Phys. Rev. D24 (1981) 3281 und D28 (1983) 860;
G. Korchemsky: Phys. Lett. B217 (1989) 330 und B220 (1989) 629;
H. Contopanagos, E. Laenen, G. Sterman: Nucl. Phys. B484 (1997) 365.

²Grund für Exponentialfunktion: Weiche (soft) reelle Abstrahlung = klassische Quelle, unabhängige Emissionen. Anzahl n der Emissionen ist Poisson-verteilt, $P_n = x^n/n! e^{-x}$, d.h. keine Emission (nur virtuelle Korrekturen) mit $P_0 = e^{-x}$. Dabei ist x der Erwartungswert von n , in $\mathcal{O}(\alpha)$ gleich der Wahrscheinlichkeit für 1 Emission, deren logarithmische Divergenz der virtuellen Ein-Schleifen-Korrektur entspricht.

QED-Formfaktor

Mein Aufgabengebiet:

Formfaktor in **massiver QED** mit **Photonmasse M**
 (\rightsquigarrow Erweiterung auf massive SM-Eichbosonen)

Formfaktor $F = 1 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots$ mit

$$F_1 = \frac{-1}{4\pi} \left[\ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) - 3 \ln \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) + \frac{7}{2} + \frac{2}{3} \pi^2 \right]$$

Resummation der *führenden Logarithmen*:

$$F \sim \exp \left[-\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) \right]$$

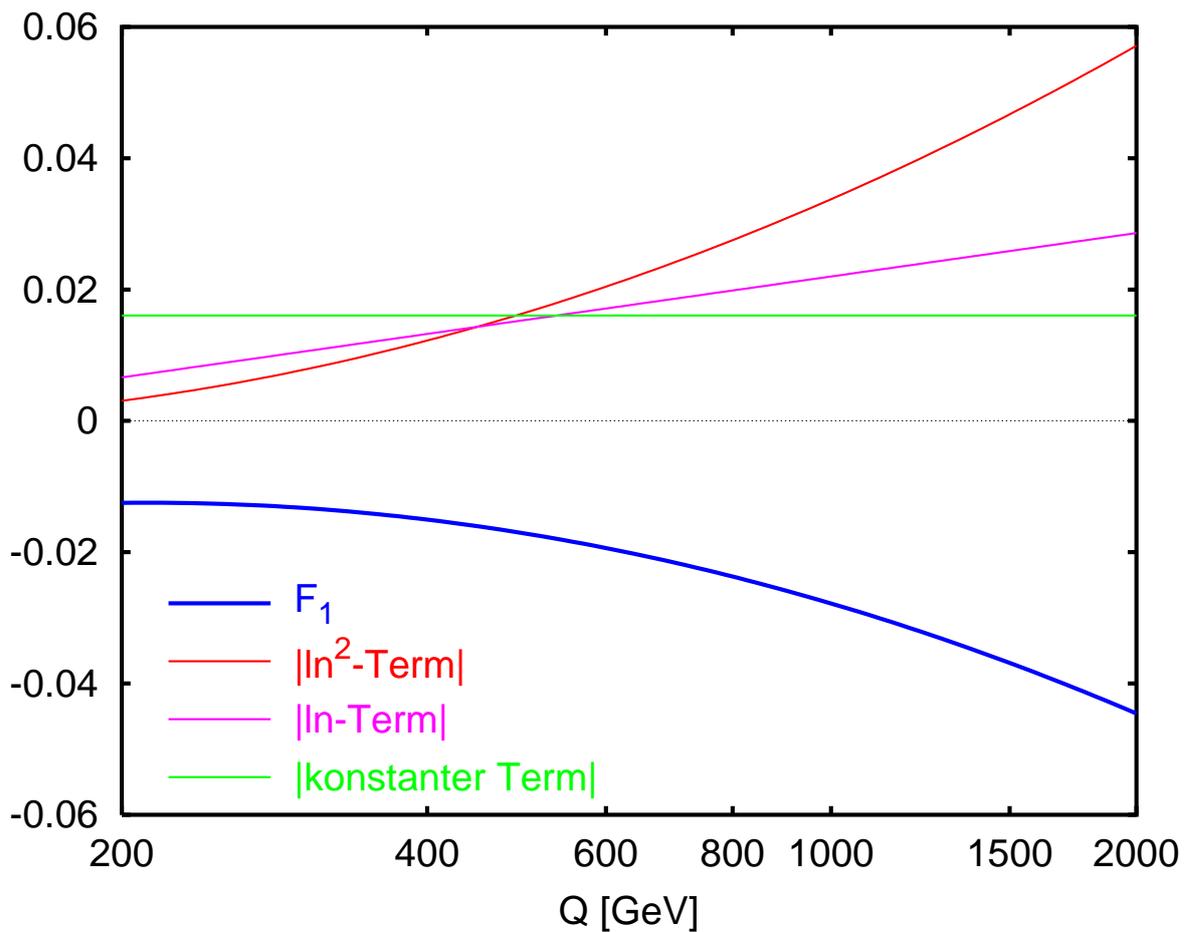
Weitere *nicht-führende Logarithmen* gesucht:

Zwei-Schleifen-Korrekturen
 im Sudakov-Limes berechnen.

Ein-Schleifen-Korrektur

$$\alpha F_1 = -\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) + \frac{\alpha}{4\pi} 3 \ln \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) - \frac{\alpha}{4\pi} \left(\frac{7}{2} + \frac{2}{3} \pi^2 \right)$$

mit $\alpha = 0.02 \left(\approx \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2 \sin^2 \theta_W} \right)$, $M = 100 \text{ GeV}$:



QED-Formfaktor

Mein Aufgabengebiet: Massive QED

Photonmasse M

- dient als Regulator der Infrarot-Divergenzen
- erlaubt die einfachere Erweiterung der Rechnung auf die massiven Eichbosonen des Standardmodells

QED-Formfaktor in Störungstheorie \rightarrow Ein-Schleifen-Korrektur F_1

- führender doppelter Logarithmus
- nicht-führender einfacher Logarithmus
- konstante Terme

Resummation der *führenden Logarithmen* $\rightarrow F \sim \dots$

$\Rightarrow F \rightarrow 0$ für $Q^2 \rightarrow \infty$

Ändert sich dieses Verhalten durch Betrachtung der nicht-führenden Logarithmen?¹

Weitere *nicht-führende Logarithmen* gesucht

\Rightarrow *Zwei-Schleifen-Korrekturen* im Sudakov-Limes berechnen.

¹Koeffizienten vor nicht-führenden Logarithmen oft größer als vor führenden Logarithmen.

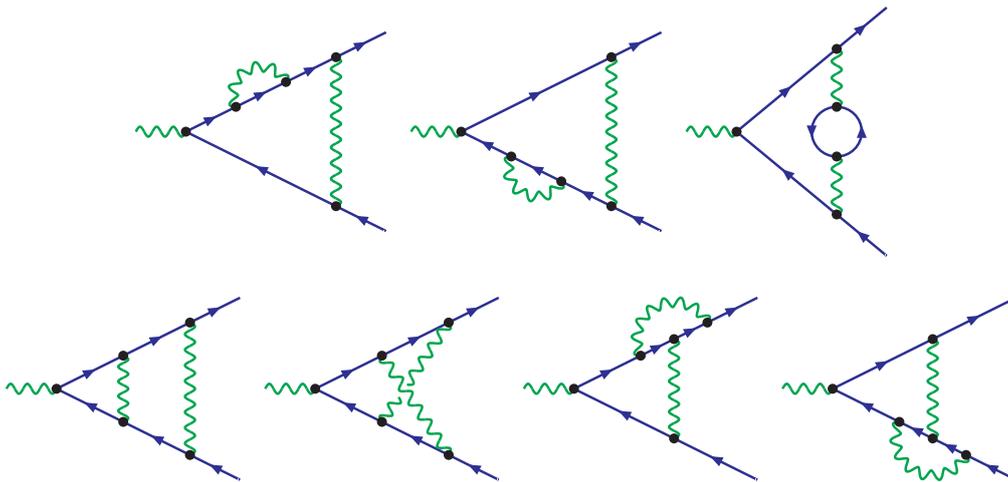
Bei realistischen Energien können nicht-führende Logarithmen dominieren: $\ln^2(Q^2/M^2) = 3 \ln(Q^2/M^2)$ bei $M = M_Z \approx 90 \text{ GeV}$, $Q \approx 400 \text{ GeV}$

Beiträge zum QED-Formfaktor

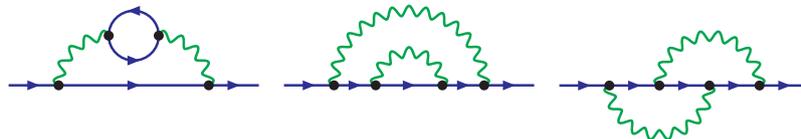
Ein-Schleifen-Vortex-Korrektur/-Selbstenergie



Zwei-Schleifen-Vortex-Korrekturen



Zwei-Schleifen-Selbstenergien



Beiträge zum QED-Formfaktor

Vertex-Diagramme und Selbstenergien der äußeren Fermionen, die zu F_1 und F_2 beitragen.

F_1 :

- Ein-Schleifen-Vertex-Korrektur
- Born-Diagramm mit Ein-Schleifen-Selbstenergie

F_2 :

- Zwei-Schleifen-Vertex-Korrekturen
- Ein-Schleifen-Vertex-Korrektur mit Ein-Schleifen-Selbstenergie
- Born-Diagramm mit Zwei-Schleifen-Selbstenergien

Berechnung der Feynman-Diagramme

Schwierigkeit bei Zwei-Schleifen-Diagrammen:

Tensor-Reduktion

$$\int \frac{d^D k}{(2\pi)^D} \frac{k^\mu k^\nu}{k^2(k+p)^2} = g^{\mu\nu} B_{00}(p^2) + p^\mu p^\nu B_{11}(p^2)$$

Ein-Schleifen-Integrale: [Passarino, Veltman '79](#)

→ nicht für Zwei-Schleifen-Topologien

Alternative:

[Tarasov '97](#); [Anastasiou, Glover, Oleari '00](#)

Tensor-Integrale → skalare Integrale mit

- mehrfachen Propagatoren:

$$\frac{1}{k^2} \rightarrow \frac{1}{(k^2)^2}, \frac{1}{(k^2)^3}, \dots$$

- erhöhter Dimension: $D \rightarrow D + 2, D + 4, \dots$

Zwei-Schleifen-Tensor-Reduktion

- Schwinger-Parameter:

$$\frac{1}{(k_i^2)^{\nu_i}} = \frac{(-1)^{\nu_i}}{\Gamma(\nu_i)} \int_0^\infty dx_i x_i^{\nu_i-1} e^{x_i k_i^2}$$

- Tensor-Reduktion, z.B.:

$$\int \frac{d^D K}{i\pi^{D/2}} K^\mu K^\nu e^{aK^2} = \frac{-1}{2a} g^{\mu\nu} \underbrace{\int \frac{d^D K}{i\pi^{D/2}} e^{aK^2}}_{a^{-D/2}}$$

- Faktoren \rightarrow Operatoren:

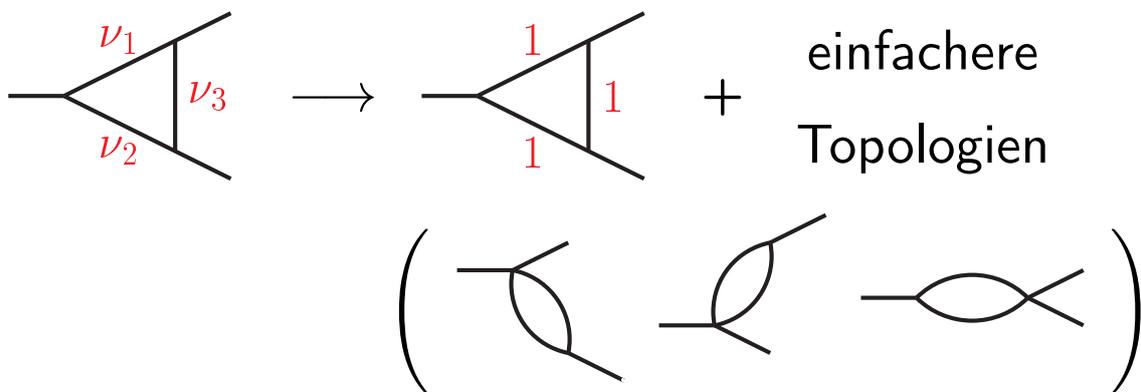
$$x_i \rightarrow -\nu_i \mathbf{i}^+ \Rightarrow \mathbf{i}^+ \frac{1}{(k_i^2)^{\nu_i}} = \frac{1}{(k_i^2)^{\nu_i+1}}$$

$$\mathbf{d}^+ \int \frac{d^D K}{i\pi^{D/2}} = \int \frac{d^{D+2} K}{i\pi^{(D+2)/2}}$$

Vereinfachung der skalaren Integrale \rightarrow
 partielle Integration:

$$\int d^D k \frac{\partial}{\partial k^\mu} \frac{k^\mu}{(\text{Propagatoren})} = 0$$

\Rightarrow Relationen zwischen Integralen:



Berechnung der Feynman-Diagramme¹

Näher eingehen auf eine Schwierigkeit bei Zwei-Schleifen-Diagrammen:
Tensor-Reduktion der Schleifen-Integrale

- *Tensor-Integral* (offene Lorentz-Indizes) als Linearkombination *skalarer Integrale* mit Tensor-Koeffizienten darstellen.
- Für Ein-Schleifen-Integrale: Methode von *Passarino* und *Veltman*²
→ für Zwei-Schleifen-Topologien nicht anwendbar.

Für Zwei-Schleifen-Topologien: Methode von *Tarasov*, weiterentwickelt von *Anastasiou*, *Glover* und *Oleari*³.

Tensor-Integrale → Linearkombinationen von skalaren Integralen mit

- mehrfachen Propagatoren, d.h. erhöhter Propagator-Potenz,
- erhöhter Raum-Zeit-Dimension D (um ein Vielfaches von 2).

¹in dimensionaler Regularisierung (Integrale in D Dimensionen), mit $\overline{\text{MS}}$ -Renormierung

²G. Passarino, M. Veltman: *Nucl. Phys.* **B160** (1979) 151

³C. Anastasiou, E. W. N. Glover, C. Oleari: *Nucl. Phys.* **B575** (2000) 416.
Schwinger-Parameter, einfachere Tensor-Reduktion → Operatoren zur Erhöhung der Propagator-Potenz bzw. Dimension

Stand der Arbeit:

- Tensor-Reduktion für alle Diagramme durchgeführt
- einfachere skalare Integrale gelöst

Noch zu erledigen:

- Berechnung *aller* skalaren Integrale

Zusammenfassung

- Bei hohen Beschleuniger-Energien können Sudakov-Logarithmen Strahlungskorrekturen dominieren.
- Sudakov-Logarithmen in Korrekturen erfordern systematische Untersuchung
→ **Resummation**.
- Für nicht-führende Logarithmen werden **Zwei-Schleifen-Korrekturen** benötigt
→ Berechnung der Diagramme mit den vorgestellten Methoden.

Ausblick:

Erweiterung von der massiven QED auf das elektroschwache Standardmodell