

DPG-Frühjahrstagung 2002 in Leipzig

Sudakov-Logarithmen in einer massiven $U(1)$ -Theorie in Zweischleifen-Näherung

Bernd Feucht

Institut für Theoretische Teilchenphysik

Universität Karlsruhe

In Zusammenarbeit mit

Johann H. Kühn und Sven Moch

- Motivation
- Sudakov-Logarithmen
- $U(1)$ -Formfaktor in Zweischleifen-Näherung
- Zusammenfassung

Motivation

Elektroschwache Präzisionsphysik

- experimentell bisher bei Energieskalen bis $\sim M_{W,Z}$
- kommende Beschleunigergeneration \rightarrow **TeV-Bereich**

Kühn et al. '00; Fadin et al. '00; Denner, Pozzorini '01

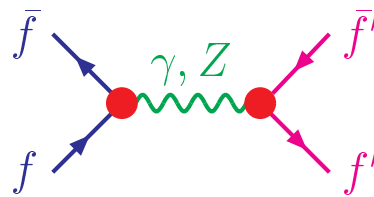
Elektroschwache Strahlungskorrekturen

bei hohen Impulsüberträgen $Q \sim \text{TeV} \gg M_{W,Z}$

Große negative Korrekturen in
exklusiven Wirkungsquerschnitten

Wichtige Prozessklasse:

4-Fermion-Streuung



Formfaktor F des Fermion-Eichboson-Vertex:

$$= \bar{u}(p_2) \gamma^\mu u(p_1) \cdot F + \dots$$

Motivation

Elektroschwache Präzisionsphysik ($M_W \approx 80 \text{ GeV}$, $M_Z \approx 91 \text{ GeV}$)

- bisher: LEP2 (210 GeV e^+e^-), Tevatron (2 TeV $p\bar{p}$)
- kommend: LHC (14 TeV pp), TESLA (500–800 GeV e^+e^-)

Elektroschwache Strahlungskorrekturen¹

bei hohen Beschleuniger-Energien, $Q \sim \text{TeV} \gg M_{W,Z}$

⇒ große negative Korrekturen in exklusiven Wirkungsquerschnitten (ohne reelle Abstrahlung von Eichbosonen)²

Wichtige Prozessklasse: 4-Fermion-Streuung

→ Beispiel: $f\bar{f} \rightarrow f'\bar{f}'$

Formfaktor des Fermion-Eichboson-Vertex

- Wechselwirkung von Fermionen mit Eichbosonen
- Impulse: Fermionen p_1, p_2 ; Eichboson q
- Amplitude \propto Born-Term; Prop.faktor: Formfaktor F
- (ggf. weitere Terme & Formfaktoren³)

¹J. H. Kühn, A. A. Penin, V. A. Smirnov: Eur. Phys. J. C17 (2000) 97;
V. S. Fadin, L. N. Lipatov, A. D. Martin, M. Melles: Phys. Rev. D61 (2000) 094002;
A. Denner, S. Pozzorini: Eur. Phys. J. C18 (2001) 461.

²große negative Korrekturen durch virtuelle Eichbosonen; mehrfache Emission weicher/kollinearere Eichbosonen kinematisch möglich
→ große positive Korrekturen durch reelle Emission

³Term $\propto \sigma^{\mu\nu} q_\nu$ (verschwindet für $m_f = 0$)

Massives U(1)-Modell

- U(1)-Eichtheorie (\rightarrow QED)
- Eichbosonen der Masse M
(\rightsquigarrow Standardmodell mit massiven Eichbosonen)

Hochenergielimes \rightarrow Sudakov-Limes:

- Impulsübertrag $|q^2| \equiv Q^2 \gg M^2$
- Fermion-Massen vernachlässigt $\rightarrow p_1^2 = p_2^2 = 0$

Störungstheorie

Formfaktor als Reihenentwicklung in $\alpha \ll 1$:

$$F = F_0 + \alpha F_1 + \alpha^2 F_2 + \dots$$

- $F_0 = 1 \rightarrow$ Born-Term, führender Beitrag
- $F_1, F_2, \dots \rightarrow$ Ein-/Zweischleifen-Korrekturen, ...
 \hookrightarrow Präzisionsergebnisse

Massives U(1)-Modell, Sudakov-Limes, Störungstheorie

Massives U(1)-Modell

- Interesse an elektroschwachen Strahlungskorrekturen
- Qualitative Analyse \rightarrow zunächst einfacheres Modell: U(1)-Eichtheorie (analog QED) mit Eichboson der Masse M
- abelscher Grenzfall von SU(2) im elektroschwachen SM mit massiven Eichbosonen W, Z

Hochenergielimes \rightarrow *Sudakov-Limes*

- Impulsübertrag $Q^2 \equiv -q^2 \gg M^2 \Rightarrow \frac{Q^2}{M^2} \gg 1$ ¹
- Fermion-Massen $\ll Q \Rightarrow p_i^2 = m_f^2 = 0$ (on-shell)

Störungstheorie

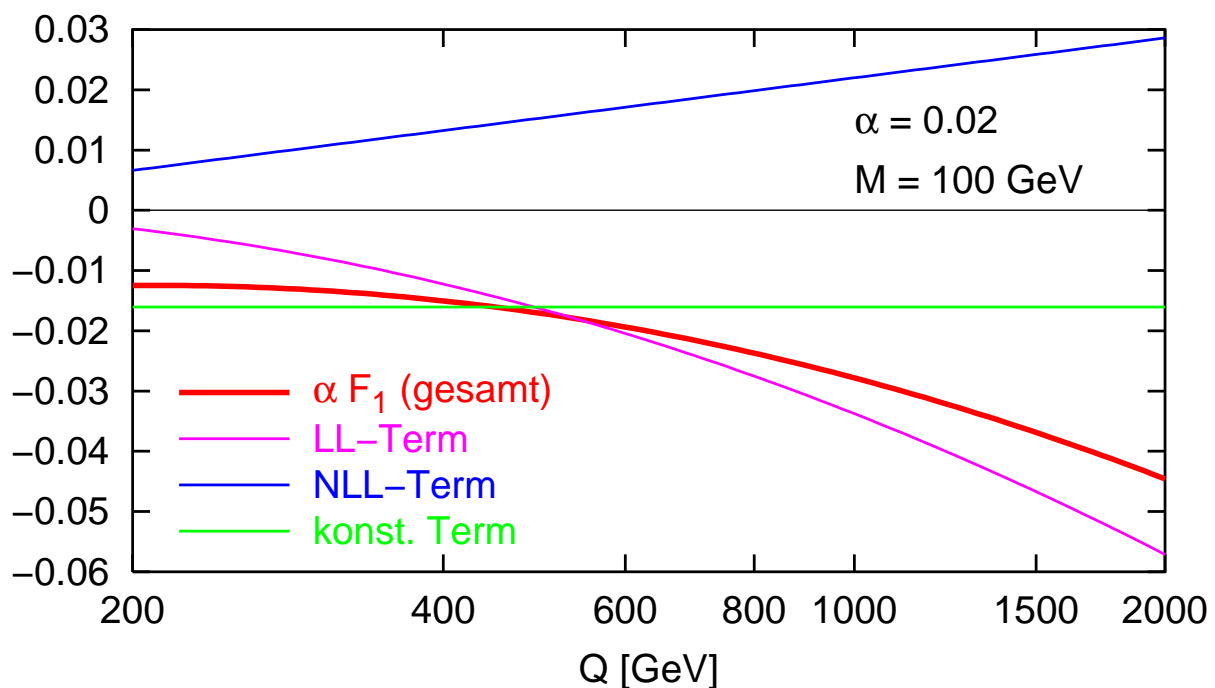
- Kopplungskonstante α (z.B. $\alpha_{\text{QED}} = \frac{e^2}{4\pi} \approx \frac{1}{137} \ll 1$)
- Koeffizienten $F_0 = 1, F_1 (\times \alpha), F_2 (\times \alpha^2), \dots$
- Schleifen-Korrekturen \rightarrow Präzisionsergebnisse

¹ q raumartig \rightarrow Formfaktor reell; für zeitartiges $q \rightarrow$ analytische Fortsetzung

Sudakov-Logarithmen

Einschleifen-Korrektur zum U(1)-Formfaktor:

$$\alpha F_1 = \frac{\alpha}{4\pi} \left[\underbrace{-\ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)}_{\text{LL}} + \underbrace{3 \ln \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)}_{\text{NLL}} - \frac{2\pi^2}{3} - \frac{7}{2} \right]$$



$Q^2 \gg M^2 \rightsquigarrow$ doppelt-logarithmische Korrekturen $\gg 1$
 \rightarrow Sudakov-Logarithmen Sudakov '56 (QED)

Große Korrekturen im TeV-Bereich:

Systematische Untersuchung der
Korrekturen höherer Ordnungen nötig.

Sudakov-Logarithmen, Einschleifen-Korrektur

Einschleifen-Korrektur zum U(1)-Formfaktor

- Einschleifen-Ergebnis $F_1 \rightarrow \mathcal{O}(\alpha)$
- \ln^2 (LL), \ln (NLL), konstanter Term
- $\alpha \sim$ elektroschwache Kopplungskonstanten¹, $M \sim M_{W,Z}$
- Asymptotik durch LL-Term bestimmt, aber für $Q \sim 1 \text{ TeV} \rightarrow \text{LL} \sim \text{NLL} \sim \text{konst}$

Sudakov-Limes \rightarrow

- ln-Argument $Q^2/M^2 \gg 1$
- doppelt-logarithmische Korrekturen: *Sudakov-Logarithmen*
- zuerst von Sudakov in der QED festgestellt²
- **Doppelte Logarithmen kommen aus Bereichen der Schleifen-Integration, wo die Energie virtuell ausgetauschter Eichbosonen verschwindet oder ihr Impuls kollinear zu den externen Fermionen wird.**
- Große Korrekturen im TeV-Bereich (einstelliger %-Bereich³) \rightarrow Systematische Untersuchung . . .

¹ $\alpha \approx \frac{\alpha_{\text{QED}}}{2 \sin^2 \theta_W}$

² V.V. Sudakov: Zh. Eksp. Teor. Fiz. 30 (1956) 87
[Sov. Phys. JETP 3 (1956) 65]

³ im Vgl. zu Born

Resummation der Logarithmen

z.B. Collins '80; Sen '81; Korchemsky '89; Contopanagos et al. '97

Führender Logarithmus in $\mathcal{O}(\alpha^n)$: $\left[\alpha \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) \right]^n$

Renormierungsgruppengleichungen \rightsquigarrow

Logarithmen in allen Ordnungen aufsummieren

Schematisches Ergebnis:

$$\begin{aligned}
 F &= 1 + \alpha (\ln^2 + \ln + \text{konst}) \\
 &\quad + \alpha^2 (\ln^4 + \ln^3 + \ln^2 + \ln + \text{konst}) + \dots \\
 &= \exp \left(\alpha (\ln^2 + \ln) + \alpha^2 (\ln^3 + \ln^2 + \ln) + \dots \right) \\
 &\quad \cdot \left(1 + \alpha \cdot \text{konst} + \alpha^2 \cdot \text{konst} + \dots \right)
 \end{aligned}$$

Verbesserte Störungsreihe:

- $\exp(\dots)$ enthält die großen Logarithmen
- Koeffizient \sim konst

Führende Logarithmen im U(1)-Formfaktor:

$$F \sim \exp \left[-\frac{\alpha}{4\pi} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) \right]$$

Resummation der Logarithmen¹

In jeder Ordnung α^n der Störungstheorie \rightarrow
führende Logarithmus: Potenz von $(\alpha \ln^2)$.

Verbessertes Verhalten der umorganisierten Störungsreihe:

- große Logarithmen in *Exponentialfunktion*² aufsummiert
 \rightarrow Verhalten für $Q^2 \rightarrow \infty$ bekannt
- Koeffizient vor $\exp(\dots)$ ohne große Logarithmen

Führende Logarithmen im U(1)-Formfaktor:

- $\exp(\dots)$ enthält LL-Term aus F_1
- \rightsquigarrow führende Logarithmen in höheren Ordnungen

¹J.C. Collins: Phys. Rev. D22 (1980) 1478;
A. Sen: Phys. Rev. D24 (1981) 3281 und D28 (1983) 860;
G. Korchemsky: Phys. Lett. B217 (1989) 330 und B220 (1989) 629;
H. Contopanagos, E. Laenen, G. Sterman: Nucl. Phys. B484 (1997) 365.

²Grund für Exponentialfunktion: Weiche (soft) reelle Abstrahlung = klassische Quelle, unabhängige Emissionen. Anzahl n der Emissionen ist Poisson-verteilt, $P_n = x^n/n! e^{-x}$, d.h. keine Emission (nur virtuelle Korrekturen) mit $P_0 = e^{-x}$. Dabei ist x der Erwartungswert von n , in $\mathcal{O}(\alpha)$ gleich der Wahrscheinlichkeit für 1 Emission, deren logarithmische Divergenz der virtuellen Einschleifen-Korrektur entspricht.

U(1)-Formfaktor in Zweischleifen-Näherung

Aus bisheriger Ein-/Zweischleifen-Rechnung und Resummation bekannt:

Kühn et al. '01

$$\alpha^2 F_2 = \frac{\alpha^2}{(4\pi)^2} \left[\underbrace{\frac{1}{2} \ln^4 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)}_{\text{LL}} - \underbrace{\left(\frac{4}{9} n_f + 3 \right) \ln^3 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)}_{\text{NLL}} + \underbrace{\left(\frac{38}{9} n_f + \frac{2\pi^2}{3} + 8 \right) \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right)}_{\text{NNLL}} + \dots \right]$$

(n_f = Zahl der Fermionen)

- NNNLL-Term (\ln^1) und konst. Term fehlen
- $Q \sim 1 \text{ TeV} \rightarrow \text{LL-Term} \sim \text{NLL} \sim \text{NNLL}$
- alternierendes Vorzeichen \rightarrow Kompensation
- Beitrag der fehlenden Terme?

Vollständige Zweischleifen-Korrekturen
im Sudakov-Limes nötig.

U(1)-Formfaktor in Zweischleifen-Näherung

- Bekannt¹: LL-Term (\ln^4), NLL (\ln^3), NNLL (\ln^2)
- Fehlen: NNNLL-Term (\ln^1), konstanter Term
- $n_f \rightarrow$ Zahl der Fermionen
- (F_2 in NNLL-Näherung auch für $SU(N)$ bekannt)
- Größe der Koeffizienten bei $Q \sim 1 \text{ TeV}$ vergleichbar
- alternierendes Vorzeichen
 - \rightarrow Kompensation der Terme möglich
 - \rightarrow auch kleinere Terme wichtig
- Beitrag der fehlenden Terme?

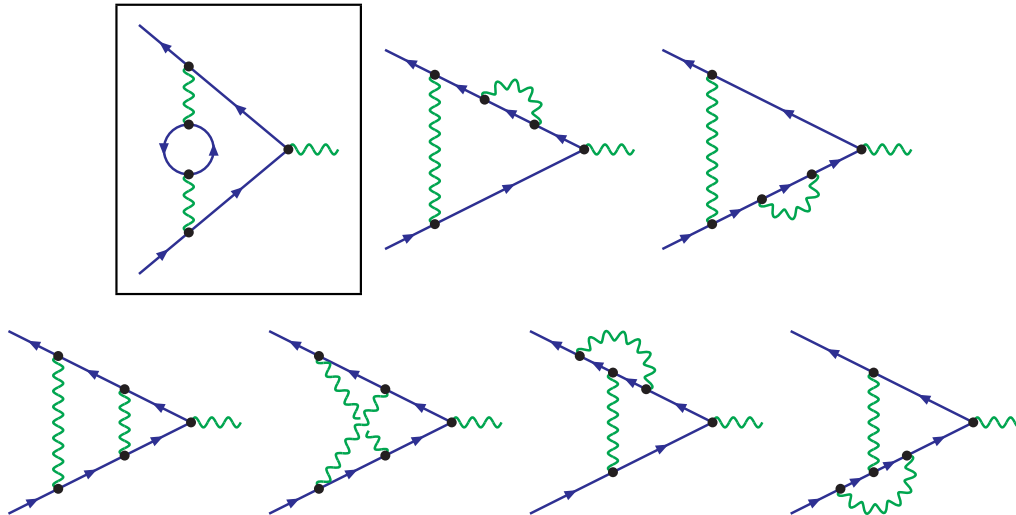
¹J.H. Kühn, S. Moch, A.A. Penin, V.A. Smirnov: Nucl. Phys. B616 (2001) 286

Beiträge zum U(1)-Formfaktor in $\mathcal{O}(\alpha^2)$

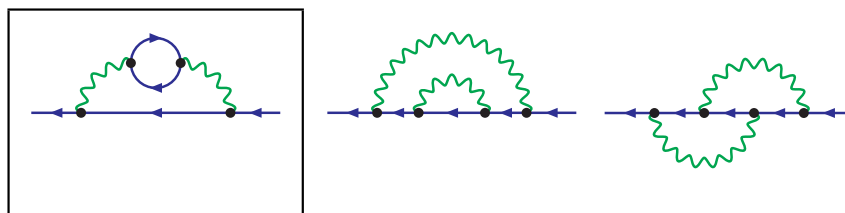
Einschleifen-Vertexkorrektur und -Selbstenergie:



Zweischleifen-Vertexkorrekturen:



Zweischleifen-Selbstenergien:



= Beiträge $\propto n_f$

Beiträge zum $U(1)$ -Formfaktor in $\mathcal{O}(\alpha^2)$

Vertexdiagramme und Selbstenergien der äußeren Fermionen, die zu F_1 und F_2 beitragen.

F_1 :

- Einschleifen-Vertexkorrektur
- Born-Diagramm mit Einschleifen-Selbstenergie

F_2 :

- Zweischleifen-Vertexkorrekturen
- Einschleifen-Vertexkorrektur mit Einschleifen-Selbstenergie
- Born-Diagramm mit Zweischleifen-Selbstenergien

Beiträge $\propto n_f$:

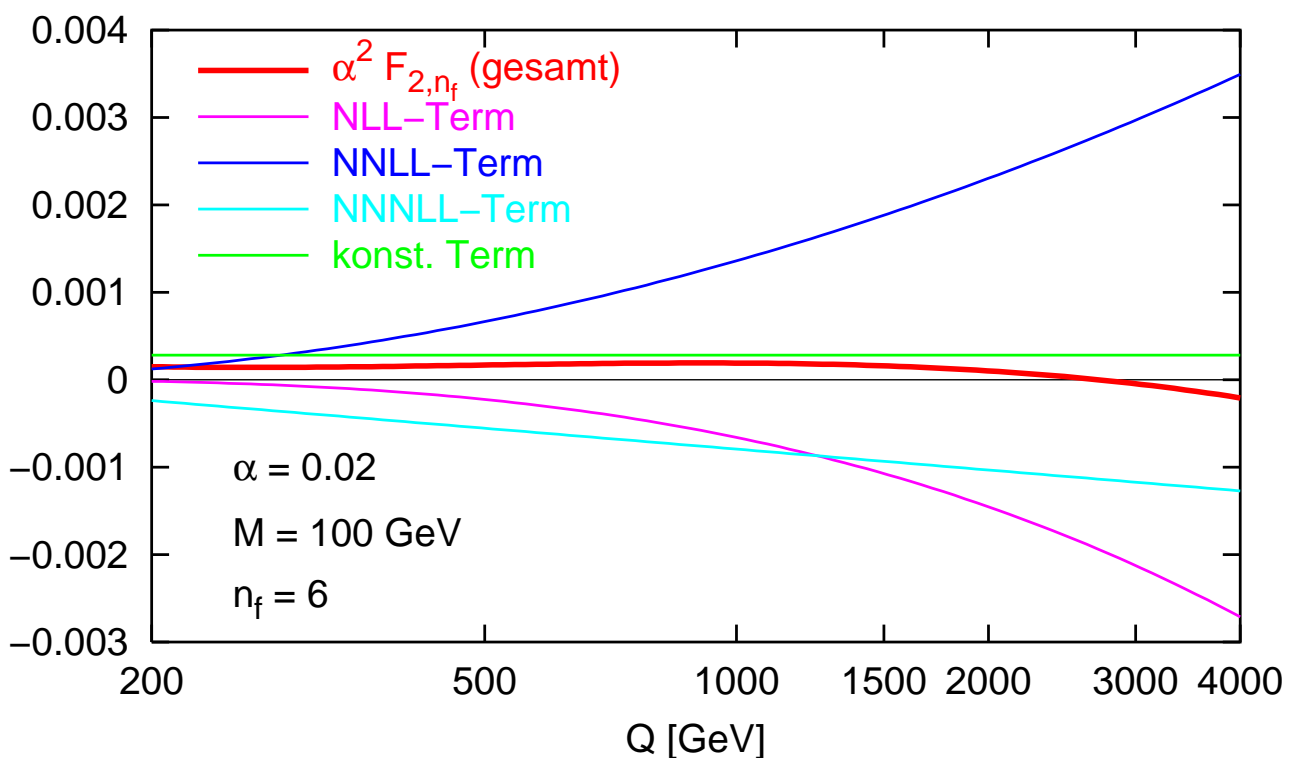
- Fermion-Schleife \rightarrow einfache Topologie
(Selbstenergie-Einsetzung in Einschleifen-Diagramm)

Betrachte nur **Beiträge** $\propto n_f$

→ n_f -Anteil ist separat eichinvariant und renormierbar.

- Kopplungskonstanten-Renormierung im $\overline{\text{MS}}$ -Schema an der Skala $\mu^2 = M^2$
- Massen-Renormierung im On-Shell-Schema

$$\alpha^2 F_{2,n_f} = \frac{\alpha^2 n_f}{(4\pi)^2} \left[-\frac{4}{9} \ln^3 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) + \frac{38}{9} \ln^2 \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) - \frac{34}{3} \ln \left(\frac{Q^2}{M^2} \right) + \frac{16\pi^2}{27} + \frac{115}{9} \right]$$



Kompensation → *Asymptotik setzt sehr spät ein.*

F_{2,n_f} -Ergebnis

- n_f -Anteil vollständig berechnet
- Führender n_f -Beitrag: \ln^3 , NLL
- $Q \sim 1$ TeV: logarithmische Terme vergleichbar
- $n_f = 6$ analog zum Standardmodell
- Vorzeichen der Koeffizienten alternierend
 - Terme kompensieren sich teilweise
 - Asymptotik setzt erst sehr spät ein!

Zusammenfassung

- Die Asymptotik $Q \rightarrow \infty$ ist durch führende Sudakov-Logarithmen bestimmt, aber bei $Q \sim \text{TeV}$ spielen auch die weiteren Terme eine Rolle.
- Die vollständigen Zweischleifen-Beiträge des n_f -Anteils im U(1)-Formfaktor wurden im Hochenergielimes berechnet.
- Durch eine Kompensation zwischen den logarithmischen Termen setzt das asymptotische Verhalten erst sehr spät ein.

Ausblick

- Übrige Beiträge zum Zweischleifen-Formfaktor
→ Verhalten des gesamten Formfaktors
- Erweiterung des U(1)-Modells um ein *Higgs-Teilchen*
- $SU(2) \times U(1) \rightarrow \text{elektroschwaches Standardmodell}$